Cayley-Zahlen und Erhaltungsgesetze für Elementarteilchen

F. Vollendorf

(Z. Naturforsch. **30 a**, 431–433 [1975]; eingegangen am 30. Dezember 1974)

Cayley Number and Conservation Laws for Elementary Particles

It is shown that the five conservation laws of charge, hyper-charge, barion number and the two lepton numbers lead to the construction of a commutative non-associative 24 dimensional linear algebra. Each element of the algebra is an ordered set of three Cayley numbers.

1. Einleitung

Die Theorie der SU(3)-Symmetrie [1] hat zu großen Erfolgen unter anderem bei der Suche nach einem Ordnungsschema für Hadronen geführt. Trotzdem ist es zweifelhaft [2], ob das SU(3)-Schema schon eine endgültige Einsicht in den Zusammenhang der Elementarteilchen untereinander liefert.

Weiterhin darf nicht übersehen werden, daß es bisher nicht gelungen ist, ein gemeinsames Klassifizierungsschema für Hadronen und Leptonen aufzustellen. Zur Erreichung dieses Ziels liegt es nahe, weitere Lie-Gruppen, welche die Gruppe SU(3) umfassen, zu untersuchen. Vielleicht gelingt es durch systematisches Suchen, gerade die richtige Lie-Gruppe bzw. Lie-Algebra herauszufinden. Aber woher weiß man eigentlich, daß sich die wesentlichen Symmetrieeigenschaften der Elementarteilchen durch Lie-Algebren beschreiben lassen? Wie Gamba [3] vorgeschlagen hat, lassen sich z. B. auch Jordan-Algebren in den Kreis der Betrachtung ziehen.

Wegen dieser Unsicherheit empfiehlt es sich, als Grundlage für eine Untersuchung die vorliegenden empirischen Ergebnisse und möglichst nur diese zu benutzen.

Bei Einführung geeigneter Linearkombinationen der üblichen Quantenzahlen zeigen sich nun einige Gesetzmäßigkeiten, von denen kaum angenommen werden kann, daß sie rein zufällig sind. Diese Regelmäßigkeiten sollen nun dargestellt werden. Zur Vorbereitung hierzu wird zunächst für einige ausgewählte Teilchen eine Übersicht über die fünf Quantenzahlen der Ladung Q, der Hyperladung Y, der Barionzahl B, der Elektronzahl L_e und der Myonzahl L_μ angegeben; hierbei soll der Wert der Hyperladung für Leptonen zu Null angesetzt werden (Tab.

Tab. 1

	Q	Y	B	L_e	L_μ
$\overline{\nu_\mu}$	0	0	0	0	−1
n	0	+1	+1	0	0
Ξ^-	−1	−1	+1	0	0
e^+	+1	0	0	−1	0

Tab. 2

		Q	Y	B	L_e	L_μ
Myonium	$\mu^+ e^-$	0	0	0	+1	−1
H-Atom	$p^+ e^-$	0	+1	+1	+1	0
Pion	π^+	+1	0	0	0	0

Tab. 3

	Q	Y	B	L_e	L_μ
$\overline{\nu_e}$	0	0	0	−1	0
Ξ^0	0	−1	+1	0	0
p^+	+1	+1	+1	0	0
μ^-	−1	0	0	0	+1

Tab. 1 bis 3. Empirische Quantenzahlen zu einigen Teilchen.

Tab. 4

	F	N_0	N_1	N_2	N_3
$\overline{\nu_\mu}$	+1	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
n	+1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Ξ^-	+1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
e^+	+1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$

Tab. 5

		F	N_0	N_1	N_2	N_3
Myonium	$\mu^+ e^-$	0	+1	0	0	0
H-Atom	$p^+ e^-$	0	0	+1	0	0
		0	0	0	+1	0
Pion	π^+	0	0	0	0	+1

Tab. 6

	F	N_0	N_1	N_2	N_3
$\overline{\nu_e}$	+1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Ξ^0	+1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
p^+	+1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
μ^-	−1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Tab. 4 bis 6. Linearkombinationen empirischer Quantenzahlen zu einigen Teilchen.

Sonderdruckanforderungen an Dr. F. Vollendorf, *D-3554 Marburg (Cappel)*, Berliner Str. 1.

1 bis 3). Für die entsprechenden Antiteilchen sind die Vorzeichen sämtlicher Quantenzahlen umzukehren.

Durch Einführung der folgenden Linearkombinationen

$$\begin{aligned} F: &= -L_e - L_\mu + B\,, \\ N_0: &= \tfrac{1}{2}(L_e - L_\mu - B)\,, \\ N_1: &= \tfrac{1}{2}(L_e + L_\mu + Y)\,, \\ N_2: &= \tfrac{1}{2}(L_e + L_\mu - Y)\,, \\ N_3: &= \tfrac{1}{2}(L_e + L_\mu - Y) + Q \end{aligned} \tag{1}$$

ergeben sich die wesentlich regelmäßigeren Tab. 4 bis 6. Wenn man die entsprechenden Antiteilchen berücksichtigt, zeigen die Tab. 4 bis 6 in bezug auf die Quantenzahlen N_0, N_1, N_2 und N_3 eine gewisse Vollständigkeit. Sie stellen alle 24 ganz- oder halbzahligen Lösungen der Gl. (2) dar.

$$\sum_{\nu=0}^{3} (N_\nu)^2 = 1\,. \tag{2}$$

Dabei bleibt ein Platz für ein hypothetisches Teilchen frei. In Tab. 2 sind hierfür aufgrund der Gln. (1) die Quantenzahlen $Q = -1$, $Y = -1$, $B = +1$, $L_e = +1$ und $L_\mu = 0$ einzutragen.

Die in den Tab. 4 bis 6 aufgeführten Quantenzahlen N_ν stehen in einem engen Zusammenhang mit den Cayley-Zahlen [4].

2. Cayley-Zahlen

Die Menge C^8 aller Cayley-Zahlen bildet bezüglich einer Addition und einer Multiplikation einen nichtassoziativen Ring $\mathfrak{C}^8$ mit Einselement 1, welcher den Körper $\mathfrak{C}^1$ der komplexen Zahlen als Unterring umfaßt.

Für $\lambda \in \mathsf{C}^1$ (C^1: Menge der komplexen Zahlen) und $a, b \in \mathsf{C}^8$ gilt stets

$$(\lambda\, a)\, b = a\, (b\, \lambda)\,.$$

Mit Hilfe von acht speziellen Cayley-Zahlen β^ν und β_ν läßt sich jede Cayley-Zahl u eindeutig als komplexe Linearkombination schreiben:

$$u = \sum_{\nu=0}^{3} (u^\nu \beta^\nu + u_\nu \beta_\nu)$$
$$u^\nu, u_\nu \in \mathsf{C}^1\,.$$

(Griechische Indizes sollen stets von 0 bis 3 laufen.)

Für die speziellen Elemente β^ν und β_ν gilt Gl. (3) und die in Tab. 7 gezeigte Multiplikationstabelle:

$$\beta^0 + \beta_0 = 1\,. \tag{3}$$

Tab. 7. Multiplikationstabelle für spezielle Cayley-Zahlen.

	0	β_0	β^0	β_1	β_2	β_3	β^1	β^2	β^3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
β^0	0	0	β^0	β_1	β_2	β_3	0	0	0
β_0	0	β_0	0	0	0	0	β^1	β^2	β^3
β_1	0	β_1	0	0	β^3	$-\beta^2$	$-\beta^0$	0	0
β_2	0	β_2	0	$-\beta^3$	0	β^1	0	$-\beta^0$	0
β_3	0	β_3	0	β^2	$-\beta^1$	0	0	0	$-\beta^0$
β^1	0	0	β^1	$-\beta_0$	0	0	0	β_3	$-\beta_2$
β^2	0	0	β^2	0	$-\beta_0$	0	$-\beta_3$	0	β_1
β^3	0	0	β^3	0	0	$-\beta_0$	β_2	$-\beta_1$	0

Durch Gl. (4) wird die Spur einer Cayley-Zahl u definiert:

$$\mathrm{Sp}\,u: = \tfrac{1}{2}(u^0 + u_0)\,. \tag{4}$$

Die über die Zuordnung

$$\mathrm{P}: u \rightarrow u^{\mathrm{P}}$$
$$u^{\mathrm{P}}: = 2\,\mathrm{Sp}\,u - u$$

gegebene Abbildung von C^8 auf sich ist ein involutorischer Antiautomorphismus des Rings $\mathfrak{C}^8$. Es gelten also für $a, b \in \mathsf{C}^8$ die folgenden Gleichungen:

$$(a^{\mathrm{P}})^{\mathrm{P}} = a\,,$$
$$(a+b)^{\mathrm{P}} = a^{\mathrm{P}} + b^{\mathrm{P}}\,,$$
$$(a\,b)^{\mathrm{P}} = b^{\mathrm{P}}\, a^{\mathrm{P}}\,.$$

3. Eine 24-dimensionale lineare Algebra

Es sei C^{24} die Menge aller geordneten Tripel (ψ, Φ, χ), wobei ψ, Φ und χ beliebige Cayley-Zahlen sind. Es sei $\lambda \in \mathsf{C}^1$. Durch die Definitionen

$$\lambda\,(\psi, \Phi, \chi): = (\lambda\,\psi, \lambda\,\Phi, \lambda\,\chi)$$

und

$$(\psi, \Phi, \chi) + (\tilde{\psi}, \tilde{\Phi}, \tilde{\chi}): = (\psi + \tilde{\psi}, \Phi + \tilde{\Phi}, \chi + \tilde{\chi})$$

wird C^{24} zu einem linearen Vektorraum. Ein kommutatives, jedoch nicht assoziatives Produkt zu je zwei Tripeln wird durch die Definition (5) eingeführt:

$$(\psi, \Phi, \chi)\,(\tilde{\psi}, \tilde{\Phi}, \tilde{\chi}): = (\Phi\,\tilde{\chi}^{\mathrm{P}} + \tilde{\Phi}\,\chi^{\mathrm{P}},\ \psi\,\tilde{\chi} + \tilde{\psi}\,\chi,\ \psi^{\mathrm{P}}\,\tilde{\Phi} + \tilde{\psi}^{\mathrm{P}}\,\Phi)\,. \tag{5}$$

Bezüglich der drei hiermit eingeführten Verknüpfungen bildet die Menge C^{24} eine über dem Körper $\mathfrak{C}^1$ lineare Algebra $\mathfrak{C}^{24}$. Die 24 Basiselemente

$$\overleftarrow{\beta^\nu} := (\beta^\nu, 0, 0), \quad \overleftarrow{\beta_\nu} := (\beta_\nu, 0, 0);$$
$$\overleftrightarrow{\beta^\nu} := (0, \beta^\nu, 0), \quad \overleftrightarrow{\beta_\nu} := (0, \beta_\nu, 0);$$
$$\overrightarrow{\beta^\nu} := (0, 0, \beta^\nu), \quad \overrightarrow{\beta_\nu} := (0, 0, \beta_\nu)$$

der Algebra $\mathfrak{C}^{24}$ können nun in einen Zusammenhang mit den 12 in den Tab. 4 bis 6 aufgeführten Teilchen und ihren Antiteilchen gebracht werden. Eine Zuordnung geschieht durch die Tab. 8 bis 10:

Tab. 8		Tab. 9		Tab. 10	
$\overleftarrow{\beta^0}$	$\overline{\nu_\mu}$	$\overleftrightarrow{\beta^0}$	$\mu^+ e^-$	$\overrightarrow{\beta^0}$	ν_e
$\overleftarrow{\beta^1}$	n	$\overleftrightarrow{\beta^1}$	$p^+ e^-$	$\overrightarrow{\beta^1}$	$\overline{\Xi^0}$
$\overleftarrow{\beta^2}$	Ξ^-	$\overleftrightarrow{\beta^2}$		$\overrightarrow{\beta^2}$	$\overline{p^+}$
$\overleftarrow{\beta^3}$	e^+	$\overleftrightarrow{\beta^3}$	π^+	$\overrightarrow{\beta^3}$	μ^+
$\overleftarrow{\beta_0}$	ν_μ	$\overleftrightarrow{\beta_0}$	$\mu^- e^+$	$\overrightarrow{\beta_0}$	$\overline{\nu_e}$
$\overleftarrow{\beta_1}$	$\overline{n}$	$\overleftrightarrow{\beta_1}$	$\overline{p}^+ e^+$	$\overrightarrow{\beta_1}$	Ξ^0
$\overleftarrow{\beta_2}$	$\overline{\Xi^-}$	$\overleftrightarrow{\beta_2}$		$\overrightarrow{\beta_2}$	p^+
$\overleftarrow{\beta_3}$	e^-	$\overleftrightarrow{\beta_3}$	π^-	$\overrightarrow{\beta_3}$	μ^-

Es wird eine Reaktion

$$A + B \rightarrow C \tag{6}$$

betrachtet, wobei A, B und C drei beliebige in den Tab. 8 bis 10 aufgeführte Teilchen sind. Bezeichnet man mit α, β und γ die diesen Teilchen zugeordneten Basiselemente, so gilt genau dann eine der beiden Gleichungen

$$\alpha \beta = \pm \gamma,$$

wenn die Reaktion (6) in bezug auf jede der vier Quantenzahlen N_ν einem Erhaltungssatz genügt. Als Beispiel wird der Pionzerfall betrachtet:

$$\pi^- \rightarrow e^- + \overline{\nu_e}, \quad \pi^- \rightarrow \overline{\nu_\mu} + \mu^-.$$

Diesen Reaktionen entsprechen die Gleichungen

$$\overleftrightarrow{\beta_3} = \overleftarrow{\beta_3}\, \overrightarrow{\beta_0} \quad \text{und} \quad \overleftrightarrow{\beta_3} = \overleftarrow{\beta^0}\, \overrightarrow{\beta_3}.$$

Mit Hilfe der Algebra $\mathfrak{C}^{24}$ lassen sich auch Reaktionen, an welchen insgesamt mehr als drei Teilchen beteiligt sind, darstellen. Dem Neutronenzerfall z. B.

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \overline{\nu_e}$$

entspricht die gültige Beziehung

$$\overleftarrow{\beta^1} = \overrightarrow{\beta_2}\, (\overleftarrow{\beta_3}\, \overrightarrow{\beta_0}).$$

Das erzielte Ergebnis legt die Vermutung nahe, daß der Ring der Cayley-Zahlen für eine aufzubauende Theorie der Elementarteilchen von grundlegender Bedeutung sein dürfte. Es ist hierbei zu erwähnen, daß die Cayley-Zahlen auch schon versuchsweise zur Untersuchung der starken Wechselwirkung [5] herangezogen worden sind.

4. Abschließende Bemerkungen

Wie in der Einleitung ausgeführt wurde, war es das Ziel der Betrachtung, bekannte empirische Ergebnisse lediglich neu zu ordnen. Das ist mit den Tab. 8 bis 10 geschehen. Auf zwei Gesichtspunkte soll abschließend hingewiesen werden. Vergleicht man die den Basiselementen $\overleftarrow{\beta^\nu}$ und $\overrightarrow{\beta_\nu}$ zugeordneten Teilchen miteinander, so zeigt sich eine Symmetrie, nach welcher das Positron dem Myon in gleicher Weise entspricht, wie die Nukleonen den Hyperonen zugeordnet sind. Damit erscheint die Rolle des Myons im Bereich der Elementarteilchen nicht so unverständlich, wie es zunächst aussieht. Dann soll auf das in Tab. 9 fehlende Teilchen hingewiesen werden. Nach den Regeln der Algebra $\mathfrak{C}^{24}$ sollte es in die Teilchen Ξ^- und ν_e zerfallen können. Es könnte eventuell in Reaktionen indirekt nachgewiesen werden, in denen es zusammen mit seinem Antiteilchen entsteht. Wenn dieses Teilchen $\Xi^- \nu_e$ eine sehr kurze Zerfallsdauer hat, müßte die Gesamtenergie, welche zu der erwähnten Paarerzeugung führt, merklich über dem doppelten Betrag der Ruhenergie des Ξ^--Teilchens liegen.

[1] M. Gell-Mann u. Y. Ne'eman, The Eightfold Way. New York, Amsterdam 1964.
[2] S. Nakamura u. S. Sato, Symmetry of Strong Interaction. Prog. Theor. Phys. Suppl. **48—51**, 1 [1971—1972].
[3] A. Gamba, On Jordan Algebra M_3^8 in High-Energy Physics and Elementary Particles, International Atomic Energy Agency, Vienna 1965, S. 641.
[4] H. Braun u. M. Koecher, Jordan-Algebren, Berlin, Heidelberg, New York 1966.
[5] J. Tiomno, Octonions and Super-Global Symmetry in Theoretical Physics,, International Atomic Energy Agency, Vienna 1963, S. 251.